数理解析研究所講究録
386巻 1980年 269-284

反応拡散系における大域的分岐解の構造

京都産業大学 理学部
西浦廉政

次の半線型放物型方程式系を考える

$$
(\tilde{P}) \begin{cases} u_t = d_1 \Delta u + f(u, v) \\ \\ v_t = d_2 \Delta v + g(u, v) \end{cases} \qquad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega
$$

境界条件 $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0$ on $\partial \Omega$

Ω は $\mathbb{R}^n$ の滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ領域とする。(f, g についての詳しい仮定は後述) このような形の方程式系は population dynamics, biochemistry, morphogenesis 等、様々な分野であらわれる。それらに共通して言える最初の仮定は、(空間－時間) 一様な状態が存在することである。

[仮定 1]

$(\tilde{P})$ は定数解 $\bar{U} = (\bar{u}, \bar{v})$ を有する。

これは $f(u,v)=g(u,v)=0$ をみたす $\bar{U}$ が存在すると言っても同じである。ここでは簡単の為、上のような $\bar{U}$ は一意的だとしよう。

この $\bar{U}$ は、空間一様な摂動に対しては、安定であるとする。すなわち

[仮定 2]　$\bar{U}$ は常微分方程式系

$$\begin{cases} u_t = f(u,v) \\ v_t = g(u,v) \end{cases}$$

の安定な平衡点である。(f, g の $\bar{U}$ におけるヤコビ行列 $\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}$ の行列式が >0、トレースが <0)

問題　(P) の空間非一様な解は存在するか？
又、(d_1, d_2) が変化する時、それらの解はどのように変わるか？

勝手な f, g に対しては、非一様解は一般に存在しない。そこで考えるべき f, g に対する仮定を述べよう。

[仮定 3]　$f(u,v)=0$ をみたす曲線を (u,v)-空間で描くと、それは S 字形をしている。すなわち、それを u について解いた時、3つの枝 $u=h_i(v)$ $(i=0,1,2)$ からなり、定義域の共通部分では、(h_i の定義域を I_i とかく)

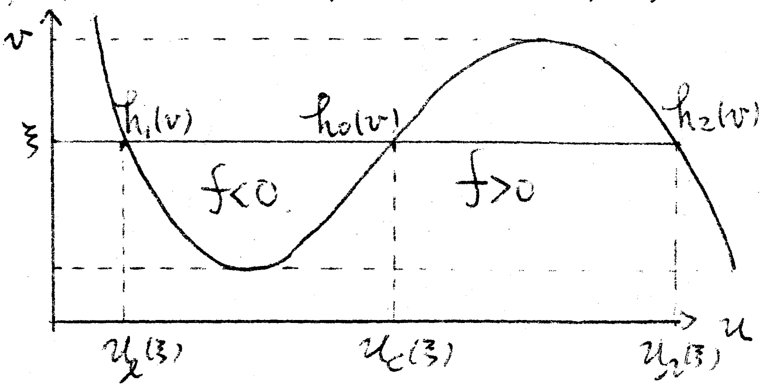
$$h_1(v) \leq h_0(v) \leq h_2(v)$$

が成り立つとする。(図1をみよ) さらに、各枝の上で

$$\frac{\partial f}{\partial u}(h_i(v), v)) \neq 0$$

を満たし(定義域の端点は除く)、$f>0$ の領域は $u=h_0(v)$ の上側が対応しているとする。

図1



注意1　上の仮定より v を h_0 の定義域 I_0 の一点 ξ で固定すると、$f(u,\xi)=0$ は3つの零点

$$u_l(\xi) < u_c(\xi) < u_r(\xi)$$

をもつ。

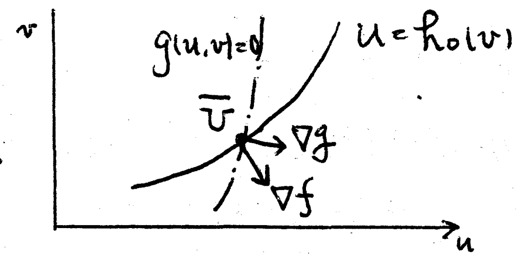
[仮定4]　$J(\xi)$ を $J(\xi)=\int_{u_l(\xi)}^{u_r(\xi)} f(u,\xi)\,du$ と定義する時、$J(\xi)$ は唯一の零点 $\xi=\xi^*$ をもち、そこで $\left.\frac{d}{d\xi}J(\xi)\right|_{\xi=\xi^*} < 0$ をみたす。

[仮定5]　定数解 $\bar{v}$ は $u=h_0(v)$ 上にある。

注意2　仮定2と5より、$\bar{v}$ 付近での $f(u,v)=0$ と

$g(u,v)=0$ の等高線は図2のようになっている.

図2.



これらの仮定をみたす具体的なモデルのいくつかは，例えば [1] をみられたい。以下では簡単の為，空間1次元と限定する。そして問題は定常問題

$$
(SP)\begin{cases} 0 = d_1 u_{xx} + f(u,v) & x \in (0,1) \equiv I \\ 0 = d_2 v_{xx} + g(u,v) & \\ u_x(0) = v_x(0) = u_x(1) = v_x(1) = 0 & \end{cases}
$$

の解で，空間非一様なものを求め，それらの拡散係数への依存性を調べることであった。(SP) の非定数解を求める解析的手法としては，次の2つが代表的である.

(i). 分岐理論

(ii). 特異摂動論.

(i) はよくわかっている解（ここでは $\bar{U}$）がパラメータ（ここでは (d_1, d_2)）を変化させる時，(拡散) 不安定性をおこし，新しい(非一様な)解にとって代わられる現象を解析する手法であり，(ii) はあるパラメータ（ここでは d_1）が退化する（0になる）付近での解を，そのパラメータを0とおいた退化問題の解をもとにして，

摂動展開により、得ようというものである。この小論の結論は、これら2つの方法で得られる解は、実は1つのものの2つの側面であるということである。少し詳しく述べる為に、記号を準備しよう。

$$\mathbb{R}^+ = \{ d_1 \mid d_1 > 0 \}$$

$$X = (H^2_N(I))^2, \text{ ここで}$$

$$H^2_N(I) = \text{closure of } \{\cos n\pi x\}_{n=0}^{\infty} \text{ in } H^2(I)$$

$$\mathcal{E} = \mathbb{R}^+ \times X$$

$\mathcal{S}$ = (SP)の非定数解全体の集合の $\mathcal{E}$ における閉包.

注意3. 元々(SP)に含まれるパラメータは d_1, d_2 の2つであるが、ここでは d_2 は任意に固定していると考え、d_1 のみを変化し得るパラメータと考える。つまり (d_1, d_2) を同時に動かすと扱いにくいので、d_2 を勝手に止めた断面での d_1-依存性を調べ、その後 d_2 を流してみることで全体像を得ようとするのである。従って、(SP)の解というときは、常に $(d_1\text{の値}, \bar{v}) \in \mathbb{R}^+ \times X$ という対で言うことにする。

さて、これらの記号を用いて結論を述べると、$\mathcal{E}$ のある1点において自明解 $\bar{v}$ から分岐した解は、(d_2が大のとき) $\mathcal{E}$ 空間において、十分小さい d_1 まで延長可能であり、そこで

特異摂動法によって得られた解に連結される。言いかえると、$\mathcal{S}$ において、分岐解を含む最大連結成分 (component) は特異摂動解を含む。(図3)

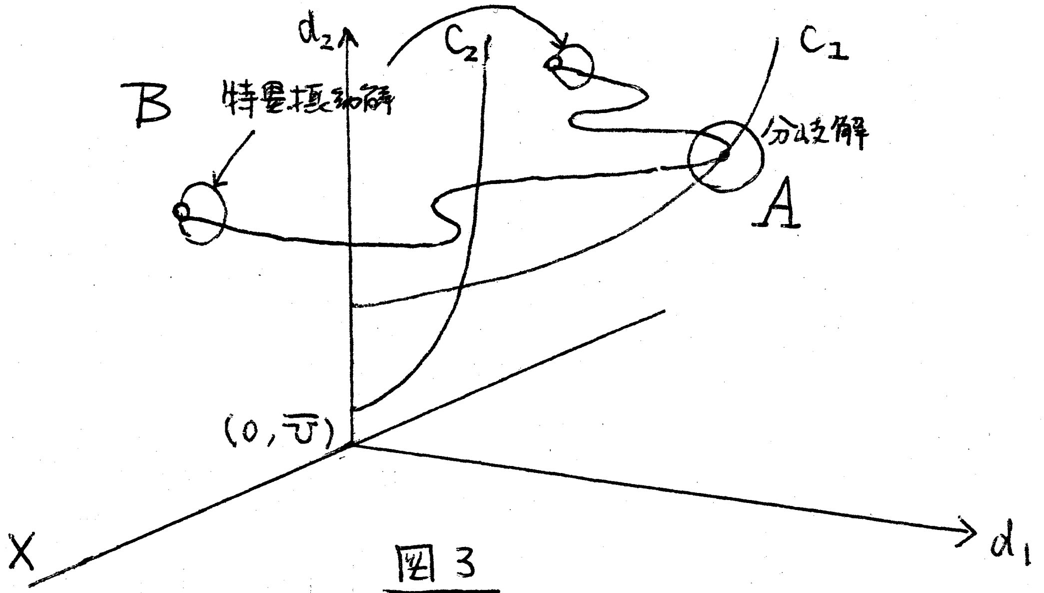


図3

この主定理がどのようにして得られるか、その概要を以下で簡単に述べよう。

1. 局所分岐理論 ([2])

d_1 を変える時、$\bar{U}$ がいつ不安定化し、新しい非定数解が出現するかは、次の $\bar{U}$ における線型固有値問題を解くことによりわかる。

$$(E) \qquad D\Phi_{xx} + B\Phi = \lambda\Phi$$

$$\Phi_x(0) = \Phi_x(1) = 0$$

ここで $D=\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}\Big|_{(\bar{u},\bar{v})}$, $\Phi={}^t(\phi_1,\phi_2)$

$\lambda=0$ となる (d_1, d_2) の値が $\bar{U}$ が不安定化するところに対応し，それは Fourier-cosine 展開により，易く，次の双曲線の族で与えられることがわかる。

(1) $$C_n\ ;\ d_2=\frac{b_{11}b_{21}/(n\pi)^4}{d_1-b_{11}/(n\pi)^2}+\frac{b_{22}}{(n\pi)^2}$$

（図3に C_1, C_2 が描いてある）

$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ を（$\bar{U}$ からの）分岐集合とよび $\mathcal{B}$ とかく。又，任意の2つの双曲線の交点を $\mathcal{B}$ からすべて取り除いたものを $\mathcal{B}'$ とおこう。このとき次の定理が成り立つ。

<u>定理1</u>（図3のA部分）

任意の $D_c=(d_1^c, d_2)\in\mathcal{B}'$ （d_2は任意に固定）に対して，ある正定数 ε_0 が存在し，(SP) は $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ の範囲で1径数の解の族 $(d_1(\varepsilon), U(\varepsilon))\in R^+\times X$ をもつ。ここで d_1 は $d_1(0)=d_1^c$ をみたす滑らかな関数であり，$U(\varepsilon)$ は Φ_n を (E) において $D=D_c$ とした零固有値に対応する（正規化された）固有関数とする時，

$$U(\varepsilon)=\bar{U}+\varepsilon\Phi_n+o(|\varepsilon|)$$

とかける。さらに上の分岐は片側分岐である，すなわち $d_1(\varepsilon)<d_1^c$ (or $>d_1^c$) ; $\varepsilon\neq0$ である。

2. 特異摂動理論（[3]）

d_1 が十分小さいとき、$d_1=0$ とおいた次の退化問題の解をもとに（SP）の解が構成できる。

$$\begin{cases} 0 = f(u,v) \\ 0 = d_2 v_{xx} + g(u,v) \end{cases}$$

ここで注意が必要である。仮定3より、第1式を u について解く。解き方は、不連続解も許すとすれば無数にある。そこで次のような class で解をさがす。

(2) $\quad (u,v) \in L^2(I) \times H^1(I)$

(3) $\quad f(u,v) = 0 \quad \text{a.e. in } I$

(4) $\quad (d_2 v_x, \phi_x) = (g(u,v), \phi) \quad \text{for all } \phi \in H^1(I)$

天下り的であるが（3）の解として、次をとる

(5) $$u = h^*(v) = \begin{cases} h_1(v) & \text{for } \{v < \xi^*\} \cap \mathring{I}_1 \\ h_2(v) & \text{for } \{v > \xi^*\} \cap \mathring{I}_2 \end{cases}$$

$d_1 \neq 0$ へ解を延長する為には、このとり方に限られる。

(5) を (4) へ代入すれば、(2)〜(4) は次のスカラー方程式を解くことに帰着する

(6) $\quad v \in H^1(I)$

(7) $(d_2 v_x, \phi_x) = (G^{\xi^*}(v), \phi), \quad {}^\forall\phi \in H^1(I).$

ここで

$$G^{\xi^*}(v) = \begin{cases} G_1(v) & \text{for } \{v < \xi^*\} \cap \mathring{I}_1 \\ \\ G_2(v) & \text{for } \{v > \xi^*\} \cap \mathring{I}_2 \end{cases}$$

$G_i = g(h_i(v), v)$ とし、$\frac{d}{dv} G_i(v) < 0$ をみたすとする。

<u>補助定理 1</u>

ある正定数 $\overline{d_2}$ が存在して、$d_2 > \overline{d_2}$ に対して、(6)-(7) の単調増大解 $v_{1,0}^{\xi^*,\alpha}(x) \in C^1(I)$ が一意的に存在する。(ここで $\alpha = d_2^{-1}$ を表わす)

<u>注意 4</u>. $x = \frac{1}{2}$ で折り返した $v_{1,1}^{\xi^*,\alpha}(1-x)$ もむろん (6)-(7) の解であるが、ここでは単調増大解のみを考える。

(5) を用いて、$u_{1,0}^{\xi^*,\alpha}(x)$ を

$$u_{1,0}^{\xi^*,\alpha}(x) = h^*\left(v_{1,0}^{\xi^*,\alpha}(x)\right)$$

と定義すると，(2)-(4) の解の対として

(8) $\quad (U^{\xi^*,\alpha}_{1,0}(x),\ V^{\xi^*,\alpha}_{1,0}(x))$

を得る。さて，この解を第1近似として，$d_1>0$ の解が構成できる。

<u>定理2</u>（図3 の B 部分）

仮定1-5 の下で $d_1=\varepsilon^2$ とおくと

$$(SP)_\varepsilon \begin{cases} 0=\varepsilon^2 u_{xx}+f(u,v) \\ 0=\dfrac{1}{\alpha}v_{xx}+g(u,v) \end{cases}$$

の解で (8) に $\varepsilon\downarrow 0$ の時漸近する以下のような解が存在する。すなわち ある正定数 ε_0 と α_0 がとれて，任意に固定した $\alpha\in(0,\alpha_0)$ に対して，$(SP)_\varepsilon$ の ε-family の解 $U_\alpha(x;\varepsilon)=(u_\alpha(x;\varepsilon),\ v_\alpha(x;\varepsilon))\in(C^2(\bar I))^2$ が $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ の範囲で存在し，次をみたす。

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} u_\alpha(x;\varepsilon)=U^{\xi^*,\alpha}_{1,0}(x),\quad \bar I - I_K \text{ で一様 } (\forall K>0)$$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} v_\alpha(x;\varepsilon)=V^{\xi^*,\alpha}_{1,0}(x),\quad \bar I \text{ で一様}$$

ここで I_K は $U^{\xi^*,\alpha}_{1,0}$ の不連続点を内部に含む，長さ K の区間である。さらに ε のみに依存する ある定数 δ_0 がとれて，$U_\alpha(x;\varepsilon)$ の（$(C^2(\bar I))^2$ の位相での）δ_0-近傍には，

(SP)$_\varepsilon$の他の解は存在しない。(局所一意性)

3. Shadow System と近似定理

d_2が十分大きいときの(SP)の分岐解の大域的な挙動は以下で導かれるShadow Systemのそれにより良く近似されることがわかる。便宜上(SP)を

$$
(SP)\quad \begin{cases} 0 = d_1 u_{xx} + f(u,v) \\ 0 = v_{xx} + \alpha g(u,v) \end{cases} \qquad \alpha = d_2^{-1}
$$

とおこう。形式的に$\alpha \downarrow 0$ ($d_2 \uparrow \infty$)とすると、$v_{xx}=0$, 従って境界条件よりvはある定数ξに等しくなければならない。一方(SP)の第2式を積分して

$$
\int_0^1 g(u,v)\,dx = 0.
$$

が、αに無関係に成立しなければならないこともわかる。かくして$\alpha \downarrow 0$ ($d_2 \uparrow \infty$)の時の極限の系として次を得る。

$$
(9)\qquad 0 = d_1 u_{xx} + f(u,\xi)
$$

$$
(10)\qquad \int_0^1 g(u,\xi)\,dx = 0
$$

$$
(11)\qquad u_x(0) = u_x(1) = 0
$$

ここで$v=\xi$は定数関数である。

この系をもつ(SP)の Shadow System と呼ぶ。
以下では(9)~(11)の(uについて)第1モード(すなわち単調な解)の解しか考えない。いくつかの記号を用意しよう。

$\mathscr{C}_0^1$; $\mathscr{S}$において $(f_u(\bar{u},\bar{v})/\pi^2,\ \bar{v})$ を含む連結成分。ここで $(f_u(\bar{u},\bar{v})/\pi^2,\ \bar{v})$ は(9)~(11)の $\bar{v}$ からの第1モード解の分岐点である。

$\mathscr{C}_\alpha^1$; $\mathscr{S}$において $(d_1^c,\ \bar{v})$ を含む連結成分。ここで $(d_1^c,\ \alpha^{-1}) \in C_1$ ((11)をみよ)

$\mathrm{Sec}_{d_1}(W) = \{ w \mid (d_1, w) \in W \}$, 但し W は $\mathscr{E}$ の勝手な部分集合。

定理3. ($\mathscr{C}_0^1$ の大域的挙動)
$\mathscr{C}_0^1$ は (generically に) locally one-parametrizable smooth curve である。そして、それは $(f_u(\bar{u},\bar{v})/\pi^2, \bar{v})$ から出発し、$d_1 \downarrow 0$ のとき、$(0, (u^*(x), \xi^*))$ と $(0, (u^*(1-x), \xi^*))$ に hit する。ここで

$$u^*(x) = \begin{cases} u_l(\xi^*) & 0 \leqq x < x^* \\ u_r(\xi^*) & x^* < x \leqq 1 \end{cases}$$

であり, α^* は 次の根として一意に決まる.

$$\int_0^1 g(u^*(x), \xi^*)\,dx = 0.$$

又, $d_1 \downarrow 0$ のとき, 上の解に hit する (9)~(11) の branch は他にはない.

$d_2 \gg 1$ のとき $\mathcal{C}_0^1$ が $\mathcal{C}_\alpha^1$ を良く近似していることを, 次の定理は述べている.

<u>定理4</u> (近似定理)

$^\forall\delta_1$, $^\forall\varepsilon>0$ に対して ある正定数 α_1 が存在して, $\mathcal{C}_\alpha^1$, $\mathcal{C}_0^1$ を共に空間 $\mathcal{E}_{\delta_1} = [\delta_1, \infty)\times X$ に制限する時, $\mathcal{C}_\alpha^1$ は $0<\alpha\leqq\alpha_1$ の範囲にあるとき, $\mathcal{C}_0^1$ の ε-近傍に属する.

以上の準備の下に, 最初に述べた主定理が証明される

4. $\mathcal{C}_\alpha^1$ の d_1 に関する大域的挙動

最初に, 固定した ε に対し, 定理2で述べた特異振動解 $U_\alpha(x;\varepsilon)$ は α に関して X での

Cauchy 列をなすことを示すことができる。その極限解を $(u^*(x;\varepsilon), \xi^*(\varepsilon))$ とかくと、これは Shadow System (9)-(11) の解となっている。ここで $\xi^*(\varepsilon)$ は、ε に依存する定数関数である。次に、

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} (u^*(x;\varepsilon), \xi^*(\varepsilon)) = (u^*(x), \xi^*)$$

を示すこともできる。すると定理 3 の最後で述べた $\mathcal{C}_0^!$ の一意性より、$(u^*(x;\varepsilon), \xi^*(\varepsilon))$ は小さなすべての ε に対して、$\mathcal{C}_0^!$ に一致しなければならない。言いかえると、$U_\alpha(x;\varepsilon)$ は $\alpha \downarrow 0$ のとき $\mathcal{C}_0^!$ に収束するのである。かくして、定理 4 と、$U_\alpha(x;\varepsilon)$ の局所一意性（定理 2 の最後をみよ）より、次の主定理を得る。

<u>主定理</u>（[1]）.

$\mathcal{C}_\alpha^!$ は d_1 に関して、次の意味で大域的に存在する

$$\mathrm{Sec}_{d_1}(\mathcal{C}_\alpha^!) \neq \phi \quad \text{for any small } d_1.$$

そして、α が十分小さいとき（d_2 が十分大きいとき），$\mathcal{C}_\alpha^!$ は小さな d_1 においては、特異摂動解 $U_\alpha(x;\varepsilon)$ に一致する。

結語的注意

$d_2 \gg 1$ の時は、$\bar{U}$ から分岐した解は $d_1 \downarrow 0$ の時、特異摂動解に接続された。d_2 が大きくない時、大域的な様子はどうなるであろうか。これは未だ完全には解決されていない問題であるが、その一部は[4]によって明らかにされている。それによると、例えば次のようなことがわかる。

(i) 2重特異点の局所構造は実は大域的構造につながる。

(ii) secondary bifurcation, tertiary bifurcation に伴う、安定性の回復又は喪失.

(iii) パラメータがある範囲にある時には、複数個の安定解が共存する.

これらは、もちろん相互に関連しており、単独ではとり出しては考えられない。安定性については、意識的に一言も触れなかったが、大域的構造が明確になった所（例えば $d_2 \gg 1$）では、解析的にも明らかになりつつある。いずれにせよ、大域的に完全な描像を得るには、いくつかの問題が未だとり残されている。

文献

[1] Y. Nishiura ; Global Structure of Bifurcating Solutions of Some Reaction-Diffusion Systems

Kyoto Sangyo Univ. Research Report 1979 – 12

[2]. M. Mimura, Y. Nishiura, M. Yamaguti : Some diffusive Prey and Predator Systems and Their Bifurcation Problems, Annals of New York Academy of Sciences, 316 (1979).

[3]. M. Mimura, M. Tabata, Y. Hosono ; Mulple Solutions of Two-Point Boundary Value Problems of Neumann Type with a Small Parameter, to appear in SIAM J. Math. Anal.

[4]. H. Fujii, M. Mimura, Y. Nishiura ; A Picture of Global Bifurcation Diagram in Ecological Interacting and Diffusing Systems, to appear in Physica D.